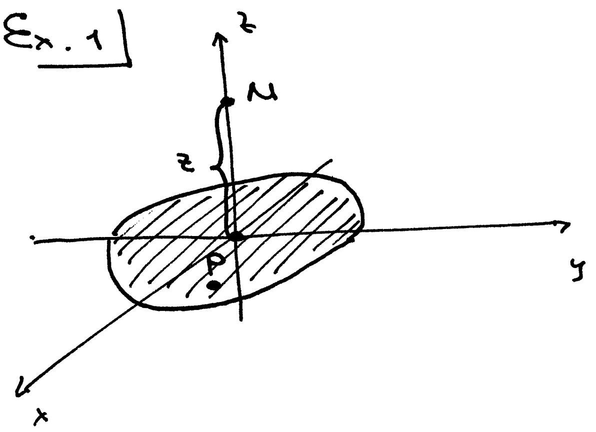
Electrostatique - examen 2008 session 2
(correction)

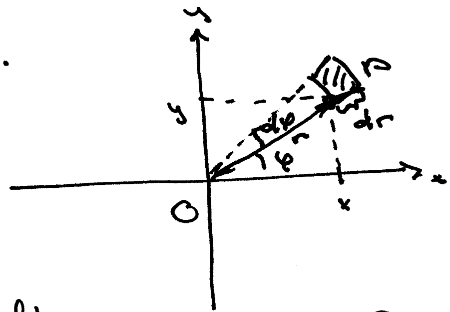
Ex. 1



1). Etude de symétries

Voir correction contrôle 2007.

2).



l'aire qui correspond à la variation de r et φ par dr et dφ est r dr dφ. Elle porte la charge dq = σ r dr dφ.

Le potentiel créé par dq en M est donc

$$dU = k\frac{dq}{|\vec{PM}|} = k\sigma\frac{r\,dr\,d\varphi}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

Donc le potentiel créé par le disque entier en M est:

$$U(M) = \int_0^R\int_0^{2\pi} k\sigma\frac{r\,dr\,d\varphi}{\sqrt{r^2+z^2}} = 2\pi k\sigma\int_0^R \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+z^2}} = \left|\begin{matrix} t = r^2+z^2 \\ dt = 2r\,dr\end{matrix}\right| =$$

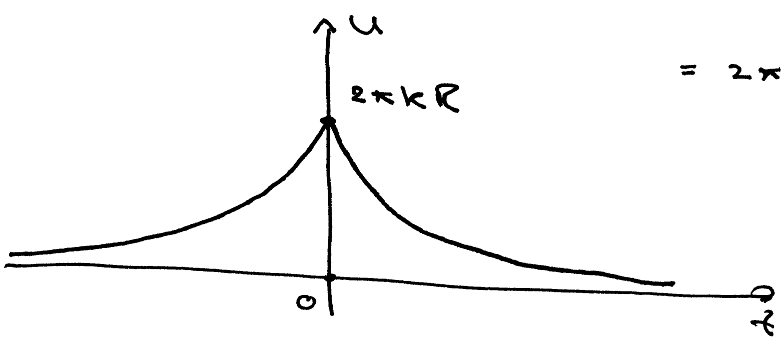
$$= 2\pi k\sigma\int \frac{1}{2}\frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\pi k\sigma\sqrt{t} = 2\pi k\sigma\sqrt{r^2+z^2}\,\Big|_{r=0}^{r=R} =$$

$$= 2\pi k\sigma\left(\sqrt{R^2+z^2}-\sqrt{z^2}\right) = 2\pi k\sigma\left(\sqrt{R^2+z^2}-|z|\right).$$

- potentiel est une fonction paire de z

4). • lorsque $z \to 0$ $\quad U(z) \approx 2\pi k R\sigma$

- lorsque $z \to \pm\infty$ $\quad U(z) = 2\pi k\sigma\left(\sqrt{R^2+z^2}-|z|\right)\cdot\dfrac{\sqrt{R^2+z^2}+|z|}{\sqrt{R^2+z^2}+|z|} =$



$$= 2\pi k\sigma\frac{R^2+\cancel{z^2}-\cancel{z^2}}{\sqrt{R^2+z^2}+|z|} \approx \frac{2\pi k R^2\sigma}{2|z|}.$$

3). Champ électrique en tout point $M \in Oz$ est $\parallel Oz$, car tous les plans passant par Oz sont des plans de symétrie; donc $\vec{E} = (0, 0, E_z)$.

De plus $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x}, -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, -\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$, d'où

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(2\pi k\left(\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right)\right) =$$

$$= \begin{cases} -2\pi k\sigma\left(\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} - 1\right) & \text{si } z > 0 \\ -2\pi k\sigma\left(\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} + 1\right) & \text{si } z < 0. \end{cases}$$

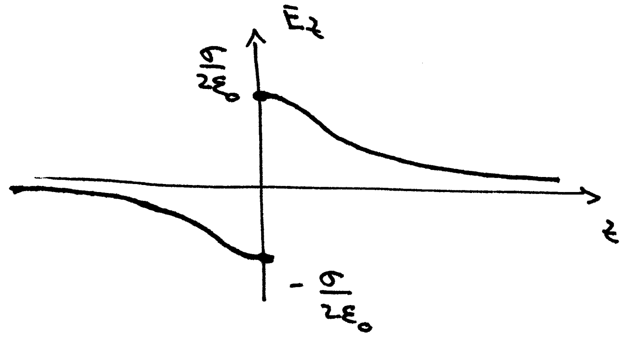
- pour $z \to +0$ $\quad E_z \approx 2\pi k\sigma = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$
- pour $z \to -0$ $\quad E_z \approx -2\pi k\sigma = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

4).

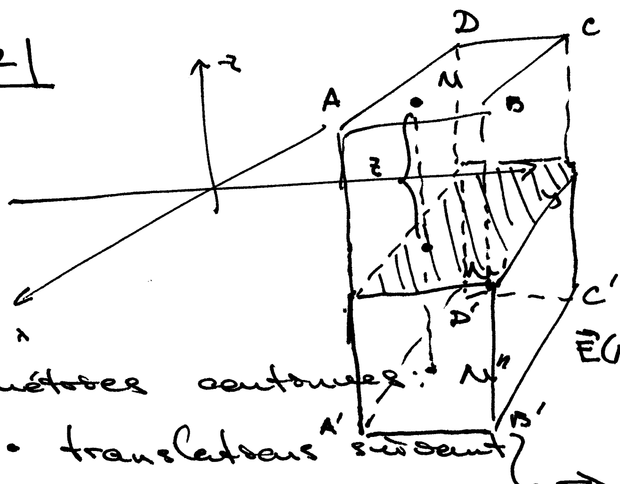
- E_z est une fonction impaire de z.
- pour $z \to +\infty$:

$$E_z = 2\pi k\sigma\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) = 2\pi k\sigma \frac{\sqrt{R^2+z^2} - z}{\sqrt{R^2+z^2}} \cdot \frac{\sqrt{R^2+z^2} + z}{\sqrt{R^2+z^2} + z} =$$

$$= 2\pi k\sigma \frac{R^2 + \cancel{z^2} - \cancel{z^2}}{\sqrt{R^2+z^2}\left(\sqrt{R^2+z^2} + z\right)} \approx 2\pi k\sigma \frac{R^2}{2z^2} = \frac{\pi k\sigma R^2}{z^2}$$



<u>Ex. 2</u>



plan chargé = plan xy.

1). Plans de symétrie:

- plan xy
- tous les plans orthogonaux au plan xy

$\Downarrow$ $\vec{E}(M) \parallel Oz$

Symétries continues:

- translations suivant Ox et Oy $\Rightarrow$ les composantes de $\vec{E}$ ne dépendent que de z.

$E(M) \parallel Oz$ car il y a une infinité de plans de symétrie passant par M (tous les plans contenant la droite MM').

Donc : $\vec{E} = f(z)\,\vec{e}_z$

$\uparrow$

une fonction
pour l'instant inconnue

On peut également ajouter que $f(z)$ est impaire.
(le sens est opposé pour $z>0$ et $z<0$).

2). Surface de Gauss : parallélépipède représenté sur le dessin (aire de base = S, hauteur = 2z).

Le flux à travers les cotés = 0 car $\vec{E} \perp \vec{n}$.

Le flux à travers la face ABCD et A'B'C'D'

$$\Phi = f(z)\cdot S + f(z)\cdot S = 2f(z)\cdot S$$ (car $|\vec{E}| = $ const en tout point de ces faces)

D'après le thm de Gauss :

$$\Phi = \frac{Q_{int.\,de\,S}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \cdot S}{\varepsilon_0}$$

En comparant les deux expressions, on trouve

$$2f(z)\cdot \cancel{S} = \frac{\sigma\cdot \cancel{S}}{\varepsilon_0} \Rightarrow f(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \text{ (pour } z>0)$$

Le champ électrique est donc uniforme dans chaque demi-espace ($z>0$ et $z<0$). De plus on retrouve les expressions obtenues pour le disque dans la limite $z \to 0$.